Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2 – М.: Мир, 1965. – 537 с.

2. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматлит, 1961. – 936 с.

3. Привалов А. А. *Теория интерполирования функций.* Кн. 2. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 1990. – 424 с.

4. Varma A. K.,Vertesi P. *Equiconvergence of some lacunary trigonometric interpolation polynomials //* J. Approx. Theory. – 1987. – V. 50. – P. 185–191.

ADJUSTMENT OF FUNCTIONS AND LACUNARY INTERPOLATION

V.V. Novikov

We prove that there exists a matrix of interpolation nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ with the properties: 1) $\mathfrak{M}_\gamma$ is arbitrarily close to the matrix of equidistant nodes $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : -n \le k \le n,\ n = 1,2,\dots\}$; 2) any function $f \in C_{2\pi}$ can be adjusted in a set of arbitrarily small measure such that the (0,2,3)-interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g on $[-\pi,\pi]$.

Keywords: lacunary interpolation, Fourier series, adjustment of functions.

УДК 519.642

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

А.В. Ожегова[1], Л.Э. Хайруллина[2]

1 *alla.ozhegova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского

2 *lxayrullina@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье исследуется слабосингулярное интегро-дифференциальное уравнение. Авторы вводят пару весовых пространств для доказательства корректности поставленной задачи. Далее к указанной задаче применяется итерационный метод и метод Галеркина и устанавливаются равномерные оценки погрешности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с логарифмической особенностью в ядре, приближенное решение, корректность задачи.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$a(t)x(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \frac{x'(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = y(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

где $a(t)$, $y(t)$ - известные непрерывно-дифференцируемые функции, $x(\tau)$ – искомая функция, удовлетворяющая условиям

$$x(-1) = x(1) = 0, \tag{2}$$

а слабосингулярный интеграл понимается как несобственный.

Традиционно такие уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач во многих известных функциональных пространствах. В данной работе, следуя [1], предлагается пара пространств искомых элементов и правых частей, в которых устанавливается корректность задачи решения указанного уравнения, позволяющая применить какой-либо аппроксимативный метод и получить равномерную сходимость приближенных решений к точному.

Обозначим

$$I\varphi \equiv I(\varphi; t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}\, d\tau$$

сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемый в смысле главного значения по Коши.

Пусть X – линейное пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций $x(t)$, для которых сингулярный интеграл $\rho^{-1}I\rho x'$ является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|x\|_X = \|x'\|_C + \left\| \frac{1}{\rho} I\rho x' \right\|_C,$$

где

$$\|x\|_C = \max_{-1\le t\le 1} |x(t)|, \quad \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Пусть Y – линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$, для которых сингулярный интеграл $I(qy')$ является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|y\|_Y = \|y\|_C + \|qy'\|_C + \|I(qy')\|_C,$$

где $q(t) = \frac{1}{\rho(t)}$.

Запишем уравнение (1) в операторном виде

$$Kx \equiv Ax + Gx = y, \quad x \in X, y \in Y,$$

где

$$Ax = a(t)x(t), \quad Gx \equiv G(x; t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \frac{x'(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau.$$

Установлено, что оператор $G : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|G^{-1}\|_{Y\to X} \le 1,$$

а оператор $A : X \to Y$ является вполне непрерывным.

Лемма 1. *Если оператор $A : X \to Y$ удовлетворяет неравенству $q \equiv \|A\|_{X\to Y} < 1$, то оператор $K \equiv G + A : X \to Y$ непрерывно обратим и*

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \le \frac{1}{1-q}.$$

Лемма 2. *В условиях леммы 1 единственное решение задачи (1)-(2) можно найти как предел в X итерационной последовательности $\{x^k\}$,*

$$Gx^{k+1} + Ax^k = y, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $x^0 \in X$ – произвольное начальное приближение, и справедливы следующие оценки

$$\|x^* - x^k\|_X \leq \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если, кроме того начальное приближение выбрано по формуле $x^0 = G^{-1}y$, то справедлива оценка

$$\|x^* - x^k\|_X \leq \frac{q^{k+1}}{1-q}\|y\|_Y, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Обозначим через $H_\omega^{r+1} = H_\omega^{r+1}[-1,1]$ множество функций, имеющих непрерывную производную $(r+1)$-го порядка, модуль непрерывности которой не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $r \geq 0$, $\delta \in (0,2]$, и удовлетворяющих дополнительному условию $\ln n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, $n \to \infty$.

Приближенное решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(t),$$

где $T_k(t) = \cos k \arccos t$ – полиномы Чебышева I рода, а неизвестные коэффициенты α_k найдем из условия ортогональности невязки полиномам Чебышева I рода.

В случае принадлежности исходных данных классу H_ω^{r+1} установлена равномерная сходимость приближенных решений к точному в пространстве X и, как следствие, равномерная сходимость со скоростью

$$\|x_n{}' - x^{*\prime}\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad r \geq 0.$$

Литература

1. Ожегова А. В. *Равномерные приближения решений слабо-сингурных интегральных уравнений перого рода*: дис... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1996. –96 с.

ON THE UNIFORM APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.V. Ozhegova, L.E. Khajrullina

In this paper we study weakly singular integro-differential equation. The authors introduce a pair of weight spaces to prove the correctness of the problem posed. Next, the iteration method and the Galerkin method are applied to the indicated problem and uniform error estimates are established.

Keywords: singular integro-differential equation with a logarithmic singularity in the kernel, approximate solution, the correctness of the problem.